ELSEVIER

Journal of Geometry and Physics 14 (1994) 43–64

JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS

Sur les relations de Plücker dans le cas d'une super algèbre de Lie basique classique complexe

Caroline Gruson

URA 748, Université Paris 7, Couloir 45-55, 5-ème étage, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

Reçu le 11 mars 1993; revisé le 17 septembre 1993

Abstract

This article deals with the study of the ideal defining the orbit of a highest weight vector in a finite dimensional irreducible representation of a basic classical Lie superalgebra.

Key words: Plücker relations, complex Lie superalgebras
1991 MSC: 17A70, 32C11, 58A50

Table de matières

0. Introduction

Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ une super algèbre de Lie complexe basique classique, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$, $\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1$ le système de racines associé, $\mathfrak{b}$

SSDI 0393-0440(93)E0051-P

une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$. Ceci détermine un choix de racines positives. On pose $\rho = \rho_0 - \rho_1$, où ρ_0 (resp. ρ_1) désigne la demi-somme des racines positives paires (resp. impaires). Soit λ dans le dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$ un poids dominant, on considère le $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie V_λ de plus haut poids λ, tel que les vecteurs de plus haut poids soient dans la partie paire de V_λ.

Rappelons la situation classique: si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, et si $V_\lambda = \Lambda^k(V)$, où V désigne la représentation standard de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, l'image dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V_\lambda^*)$ de l'orbite sous l'action du groupe complexe connexe simplement connexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un vecteur non nul de plus bas poids $v_{-\lambda}^*$ du dual V_λ^* de V_λ est la grassmannienne $G_{n-k}(V^*)$, plongée dans $\mathbb{P}(V_\lambda^*)$ par les coordonnées de Plücker. Celles-ci sont reliées par des relations explicites de degré 2, qu'on appelle relations de Plücker (voir par exemple [2, pp. 209–211]). Kostant généralise ce résultat au cas d'une représentation irréductible de dimension finie d'une algèbre de Lie semi simple et démontre que l'idéal de $G.v_{-\lambda}^*$ est engendré par ses éléments de degré 2 [1,7]. Sa démonstration utilise le fait que l'élément de Casimir Ω de degré 2 du centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, sépare le poids $k\lambda$ de $S^k(V_\lambda)$ des autres plus hauts poids de ce module. Ceci a été utilisé par Garfinkle [1] pour construire l'idéal de Joseph de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie simple, puis par Peterson et Kac, qui ont généralisé ce résultat au cas des algèbres de Kac–Moody qui possèdent un élément de Casimir et l'ont appliqué à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires. De plus, le résultat de Kostant reste vrai dans le cas des groupes algébriques en caractéristique p, en dépit du fait qu'alors l'élément de Casimir ne sépare pas les poids extrémaux des autres poids, comme l'a démontré Ramanathan dans [10].

Par analogie avec le cas classique, on se propose d'étudier l'idéal $I = \bigoplus_{k\geq 0} I_{k\lambda}$ de $S(V_\lambda)$ où $I_{k\lambda}$ désigne l'espace des "fonctions polynomiales" de degré k sur V_λ^* nulles sur l'orbite de $v_{-\lambda}^*$ sous l'action du super groupe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dont les points complexes forment un groupe connexe et simplement connexe. Comme la super algèbre est supposée basique classique, il existe une forme bilinéaire non dégénérée $\mathfrak{g}$-invariante sur $\mathfrak{g}$. Pour tout $\mathfrak{g}$, on choisit une telle forme. Ceci définit un élément de Casimir Ω de $Z(\mathfrak{g})$ et fournit des éléments de $I_{2\lambda}$. Malgré cela, nous verrons que contrairement au cas classique, le sous-espace $I_{2\lambda}$ n'engendre pas, en général, l'idéal I, et nous étudierons le problème de trouver des générateurs de cet idéal. Décrivons plus en détails ces résultats.

Dans la première partie, on rappelle quelques définitions et résultats dus à Kac et on précise le contexte géométrique.

Dans la seconde partie, on associe à tout élément de $Z(\mathfrak{g})$ d'ordre k (en tant qu'opérateur différentiel) des éléments de $I_{k\lambda}$ qui généralisent les relations de Plücker (lesquelles correspondent à Ω). On en déduit que si l est un entier ≥ 1 tel que les éléments de $Z(\mathfrak{g})$ d'ordre $\leq l$ permettent de séparer, pour tout

$k \in \mathbb{N}^*$, le poids $k\lambda$ des autres plus hauts poids intervenant dans $S^k(V_\lambda)$, alors I est engendré par ses éléments de degré $\leq l$.

Les deux dernières parties sont consacrées à l'étude d'exemples. Ils montreront que, pour ce problème, les super algèbres de Lie diffèrent des algèbres de Lie semi-simples et des algèbres de Kac–Moody symétrisables.

Je remercie Michel Duflo pour les nombreuses conversations qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

1. Orbite d'un vecteur de plus haut poids d'un $\mathfrak{g}$-module simple

On rappelle (cf. [4]) qu'une super algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ est dite basique classique si: a) $\mathfrak{g}$ est simple, b) l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ est réductive et c) il existe une forme bilinéaire invariante non dégénérée sur $\mathfrak{g}$.

Les notations utilisées sont celles de l'introduction, en particulier on a fixé une forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$ et une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$.

On dira qu'un élément $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est un poids si λ est un poids pour un module de dimension finie, ce qui est équivalent à la condition $2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$, où $(\, , \,)$ désigne le produit scalaire sur $\mathfrak{h}^*$ déduit de la forme choisie sur $\mathfrak{g}$.

Par commodité de langage en ce qui concerne la notion de poids, nous excluons l'algèbre $p\mathfrak{sl}(2,2)$, pour laquelle les poids de la représentation adjointe ne sont pas de multiplicité 1.

Définition 1.1. On dit qu'un poids est dominant si c'est le plus haut poids d'un module simple de dimension finie.

Remarque. Si les poids dominants pour $\mathfrak{g}$ sont dominants (au sens usuel) pour $\mathfrak{g}_0$, la réciproque est en général fausse.

De plus, la proposition 2-3 de [4] explicite des conditions pour qu'un poids de $\mathfrak{h}^*$ soit le plus haut poids d'un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie, dans le cas où on a choisi une sous-algèbre de Borel "standard", c'est-à-dire correspondant à un système de racines simples qui ne contient qu'une seule racine impaire.

On rappelle que l'on dit qu'un élément $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est typique si pour toute racine impaire α dans Δ_1 telle que 2α n'appartienne pas à Δ_0, on a

$$(\lambda, \alpha) \neq 0.$$

(Cette définition se trouve dans [4].)

Un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie de plus haut poids λ est dit typique si pour toute racine impaire α dans Δ_1 telle que 2α n'appartienne pas à Δ_0, on a

$$(\lambda + \rho, \alpha) \neq 0.$$

Contrairement aux apparences, cette notion ne dépend pas du choix de la sous-algèbre de Borel (voir Kac [4]).

Le choix que nous avons fait d'une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ fixe un système de racines positives, Δ^+.

Lemme 1.2 (voir [4], thm. 1). *Soit W un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. Supposons l'action de $\mathfrak{h}$ semi simple. Soit λ un poids intervenant dans W tel que:*

(i) Pour tout $\alpha \in \Delta^+$, $\lambda + \alpha$ ne soit pas un poids de W,

(ii) λ soit de multiplicité 1,

(iii) $(\lambda + \rho, \alpha) \neq 0$ $\forall \alpha \in \Delta_1$ tel que 2α n'appartienne pas à Δ_0.

Soit v un vecteur non nul de poids λ. Alors $\mathcal{U}(\mathfrak{g}).v$ est un module simple de poids dominant λ et il admet un unique supplémentaire $\mathfrak{g}$ stable dans W.

Soit λ un poids dominant. Rappelons qu'il existe deux modules de plus haut poids λ. Nous noterons V_λ celui tel que la droite des vecteurs de plus haut poids soit contenue dans la partie paire. On choisit un vecteur non nul $v_\lambda \in V_\lambda$ de plus haut poids λ.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on définit $I_{k\lambda} \subset S^k(V_\lambda)$ comme le plus grand sous-espace $\mathfrak{g}$-stable qui annule $v^*_{-\lambda}$, vecteur non nul de plus bas poids du dual V^*_λ de V_λ. On pose $I = \bigoplus_{k\geq 0} I_{k\lambda}$, c'est un idéal de $S(V_\lambda)$.

Soit $(G, \mathcal{O}_G)$ le super groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dont les points complexes forment un groupe de Lie connexe et simplement connexe. Remarquons que G opère dans V_λ.

Rappelons comment Kostant, dans [6], définit les orbites: Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une super variété sur laquelle G opère. Soit x un point de X, on considère le morphisme de super variétés:

$$(\varphi, \varphi^*) : (G, \mathcal{O}_G) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

déduit de l'action de G au point x. Il existe un sous super groupe $(T, \mathcal{O}_T)$ de $(G, \mathcal{O}_G)$ unique tel que (φ, φ^*) se factorise en une immersion de $(G/T, \mathcal{O}_{G/T})$ dans $(X, \mathcal{O}_X)$. On dit que $(T, \mathcal{O}_T)$ est le stabilisateur du point x. Si cette immersion est localement fermée, il existe une sous super variété analytique complexe $(Y, \mathcal{O}_Y)$ de $(X, \mathcal{O}_X)$ telle que (φ, φ^*) se factorise en un isomorphisme de $(G/T, \mathcal{O}_{G/T})$ sur $(Y, \mathcal{O}_Y)$ et qu'on appelle l'orbite de x sous G.

Notons $((V^*_\lambda)_0, \mathcal{O}_{(V^*_\lambda)_0})$ la super variété analytique complexe dont le faisceau structural est $O_{(V^*_\lambda)_0} \otimes \Lambda(V_1)$, où $O_{(V^*_\lambda)_0}$ désigne le faisceau des fonctions analytiques sur $(V^*_\lambda)_0$.

Théorème 1.3. *L'orbite de $v^*_{-\lambda}$ sous G existe, elle est fermée dans $(V^*_\lambda)_0 \backslash \{0\}$ et l'idéal I la définit au voisinage de chacun des points de $(V^*_\lambda)_0 \backslash \{0\}$.*

Introduisons le super espace projectif $\mathbb{P}V^*_\lambda$ [8, p. 195], c'est-à-dire la super grassmannienne des sous-espaces de dimension $1 + 0\varepsilon$ de V^*_λ. C'est aussi le quotient de $(V_\lambda^*)_0\backslash\{0\}$ par l'action de $\mathbb{C}^*$. Le super groupe G opère sur $\mathbb{P}V_\lambda^*$ car l'action de G sur $(V_\lambda^*)_0\backslash\{0\}$ commute avec celle de $\mathbb{C}^*$. On notera $[v^*_{-\lambda}]$ l'image de $v^*_{-\lambda}$ dans $\mathbb{P}V_\lambda^*$.

Soit T (resp. K) le stabilisateur de $v^*_{-\lambda}$ (resp. $[v^*_{-\lambda}]$) dans G, on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
(G/T, \mathcal{O}_{G/T}) & \xrightarrow{(i,i^*)} & ((V_\lambda^*)_0\backslash\{0\}, \mathcal{O}_{(V_\lambda^*)_0\backslash\{0\}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(G/K, \mathcal{O}_{G/K}) & \xrightarrow{(j,j^*)} & (\mathbb{P}V_\lambda^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}V_\lambda^*})
\end{array}$$

où les flèches verticales sont les projections canoniques et les flèches horizontales sont des immersions. Comme K/T est isomorphe à $\mathbb{C}^*$, les deux flèches verticales peuvent être interprétées comme des fibrés principaux de groupes $\mathbb{C}^*$; celui de gauche est l'image réciproque par (j, j^*) de celui de droite.

Remarquons que l'espace topologique sous-jacent à G/K est compact: en effet, K_{red} contient le réduit d'un sous-groupe de Borel de G car $v^*_{-\lambda}$ est un vecteur de plus bas poids, donc K_{red} est un sous-groupe parabolique de G_{red}. L'immersion (j, j^*) est donc nécessairement fermée. Par image réciproque, il en est de même de (i, i^*), d'où l'existence de l'orbite.

D'après [8, 4.3.5], $\mathbb{P}(V_\lambda^*)$ est canoniquement isomorphe à la super variété obtenue en considérant l'idéal $\mathcal{M}$ définissant $(\mathbb{P}(V_\lambda^*))_{\text{red}} = \mathbb{P}((V_\lambda^*)_0)$ dans $\mathbb{P}(V_\lambda^*)$, puis en faisant la somme directe des faisceaux $\mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1}$; cette variété est appelée le gradué associé de $\mathbb{P}(V_\lambda^*)$. Il existe donc une projection canonique:

$$(\pi, \pi^*) : \mathbb{P}V_\lambda^* \longrightarrow \mathbb{P}((V_\lambda^*)_0).$$

Le morphisme π^* fait du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}V_\lambda^*}$ une $\mathcal{O}_{\mathbb{P}((V_\lambda^*)_0)}$-algèbre; en particulier, c'est un faisceau analytique cohérent sur $\mathbb{P}((V_\lambda^*)_0)$.

Comme j est une immersion fermée, l'image directe $j_*(\mathcal{O}_{G/K})$ par j est le quotient de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}((V_\lambda^*)_0)}$ par un idéal cohérent $\mathcal{J}$. Soit $\mathcal{O}(1)$ le faisceau des sections du fibré tautologique sur $\mathbb{P}((V_\lambda^*)_0)$, on notera $\mathcal{O}(n)$ sa puissance symétrique n-ième. On pose:

$$J_n = \Gamma(\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}V_\lambda^*}} \mathcal{O}(n)),$$

où Γ désigne le passage aux sections globales. Alors $J = \bigoplus_{n\geq 0} J_n$ est un idéal gradué de $S(V_\lambda)$.

On utilise alors GAGA [12, lemme 8], cet idéal définit l'orbite de $v^*_{-\lambda}$ au voisinage de chaque point de $(V_\lambda^*)_0\backslash\{0\}$.

Il reste à voir que $I = J$.

Remarquons que, par construction, J est le noyau de l'application de $S(V_\lambda)$ dans $A(G)$, algèbre des fonctions holomorphes de G dans $\mathbb{C}$, déduite de l'action de G au point $v^*_{-\lambda}$.

Soit $\hat{A}(G, e)$ le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{G,e}$ des germes de sections de $\mathcal{O}_G$ en l'élément neutre e de G. On a une injection naturelle de $A(G)$ dans

$\hat{A}(G,e)$. Notons $\varphi_{v^*_{-\lambda}}$ la composée de cette injection et de l'application de $S(V_\lambda)$ dans $A(G)$.

Comme le dual topologique de $\hat{A}(G,e)$ est exactement l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on peut transposer $\varphi_{v^*_{-\lambda}}$ et obtenir ainsi une application:

$$^t\varphi_{v^*_{-\lambda}} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \hat{S}(V^*_\lambda) = \prod_{n\geq 0} S^n(V^*_\lambda).$$

Cette application est $\mathfrak{g}$-linéaire et envoie l'élément neutre 1 de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur la famille $((v^*_{-\lambda})^n) \in \hat{S}(V^*_\lambda)$. L'image de $^t\varphi_{v^*_{-\lambda}}$ est donc contenue dans $\prod_{n\geq 0} W_n$ où W_n est le sous-espace de $S^n(V^*_\lambda)$ engendré par $(v^*_{-\lambda})^n$. Comme J est gradué, on en déduit que J_n est l'orthogonal de $(v^*_{-\lambda})^n$ dans $S^n(V_\lambda)$, c'est à dire $I_{n\lambda}$. D'où le théorème. □

Remarquons que, contrairement au cas classique, on ne peut pas affirmer que pour tout poids dominant $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on a:

$$S^k(V_\lambda) = I_{k\lambda} \oplus V_{k\lambda},$$

car on n'est pas assuré que le vecteur v^k_λ engendre un sous-$\mathfrak{g}$-module simple de $S^k(V_\lambda)$.

Définition 1.4. Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, λ dominant. On dit qu'un module de plus haut poids λ est complètement typique si, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}^*$, les modules de plus haut poids $k\lambda$ sont typiques.

Cette notion dépend du choix de la sous-algèbre de Borel.

Soit V_λ un $\mathfrak{g}$-module complètement typique, alors, d'après le lemme 1.2, il existe un facteur direct unique isomorphe à $V_{k\lambda}$ dans $S^k(V_\lambda)$, et l'on a

$$S^k(V_\lambda) = I_{k\lambda} \oplus V_{k\lambda}.$$

2. Relations de Plücker

Faisons quelques rappels sur $Z(\mathfrak{g})$. Soit $X \in Z(\mathfrak{g})$. Soit λ un poids dominant, l'action de X sur V_λ est scalaire: c'est une homothétie, dont le rapport, que l'on note $\chi_\lambda(X)$, est appelé le caractère infinitésimal de λ évalué en X. L'application

$$X \mapsto \chi_\lambda(X)$$

est un homomorphisme de $Z(\mathfrak{g})$ dans $\mathbb{C}$. On construit ainsi un homomorphisme de $Z(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre des fonctions sur l'ensemble des poids dominants; cet homomorphisme se calcule au moyen de l'homomorphisme de Harish-Chandra $\varphi : Z(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})^W$ dont la construction directe est la suivante:

On écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. On a alors: $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{n}^-\mathcal{U}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+)$.

Soit p la projection de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$. La restriction de p à $Z(\mathfrak{g})$ est un homomorphisme. On la compose avec la translation par ρ, ce qui donne un homomorphisme

$$\varphi : Z(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})^W.$$

On a $\chi_\lambda(X) = \varphi(X)(\lambda + \rho)$. Il résulte de cette description que si X est un élément de $Z(\mathfrak{g})$ d'ordre $\leq k$, l'application

$$\lambda \mapsto \chi_\lambda(X)$$

est un polynôme de degré $\leq k$. Si $X = \Omega$, l'élément de Casimir fixé par le choix de la forme invariante, on a $\Omega = \sum e_i e^i$ si e_i est une base de $\mathfrak{g}$, et e^i la base duale de $\mathfrak{g}$ telle que $(e_i, e^j) = \delta_{i,j}$ et ce polynôme est donné par

$$\chi_\lambda(\Omega) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho).$$

Soit λ un poids dominant. Soit $X \in Z(\mathfrak{g})$, d'ordre k. Pour chaque $k' \in \mathbb{N}$, on considère l'opérateur $X - \chi_{k'\lambda}(X)$ agissant dans $S^{k'}(V_\lambda)$. Son image $\mathcal{R}_{k'}(X)$ est contenue dans $I_{k'\lambda}$ et on appelle relations de Plücker de degré k' associées à X les éléments de cette image.

Théorème 2.1. *Soit $X \in Z(\mathfrak{g})$ d'ordre $\leq k$. L'idéal de $S(V_\lambda)$ engendré par les $\mathcal{R}_{k'}(X)$ pour $k' \leq k$ contient toutes les relations de Plücker, $\mathcal{R}_l(X), l \in \mathbb{N}$.*

Lemme 2.2. *Soit A un super anneau et soient $a_0, \ldots, a_k$ des éléments de A. Soit $x \in A_0$, alors on a:*

$$[a_0, [\ldots [a_k, x] \ldots]] = \sum_{I \subset \{0,\ldots,k\}} \varepsilon(I) a_I x a_{\overline{CI}}$$

où $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ est ordonné par l'ordre induit, $\overline{I}$ désignant le même ensemble ordonné par l'ordre inverse. $a_I = a_{i_1} \cdots a_{i_n}$, CI désigne le complémentaire de I. $\varepsilon(I) = (-1)^\alpha$ où $\alpha = \operatorname{card}\{(i,j) \in I \times CI, i < j, v_j$ impair$, v_i$ pair$\}$ + $\operatorname{card}(I) + k(k+1)/2$, où $k = \operatorname{card}\{i, a_i$ impair$, i \in CI\}$.

Démonstration (du lemme). On se place dans $\operatorname{End}(A)$. Pour tout i, on note L_i (resp. R_i) la multiplication à gauche (resp. à droite) par a_i. On note β l'élément de $\operatorname{End}(A)$ égal à l'identité sur A_0 et $-\operatorname{id}$ sur A_1. L'élément $\operatorname{ad}(a_i)$ de $\operatorname{End}(A)$ s'écrit donc:

$$\operatorname{ad}(a_i) = L_i - R_i \beta^{p(a_i)}.$$

On a d'autre part:

$$L_i \circ \beta = (-1)^{p(a_i)} \beta \circ L_i \text{ et } R_i \circ \beta = (-1)^{p(a_i)} \beta \circ R_i.$$

On peut donc écrire:

$$\prod_{0\leq i\leq k}(L_i - R_i\beta^{p(a_i)}) = \sum_{I\subset\{0,\dots,k\}} \varepsilon(I)L_I R_{\overline{CI}}\beta^{\sum p(a_i)}$$

où $L_I = L_{i_1}\dots L_{i_n}$, $R_I = R_{i_n}\dots R_{i_1}$

En appliquant les deux membres à x, on obtient le résultat. □

Démonstration (du théorème). L'élément X est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ dans $S(V_\lambda)$.

On note P le polynôme de degré $\leq k$ défini par

$$P(n) = \chi_{n\lambda}(X).$$

Soit $v \in V_\lambda$, on note m_v la multiplication par v dans $S(V_\lambda)$. Rappelons qu'un endomorphisme d de $S(V_\lambda)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ si et seulement si on a:

$$[m_{v_0}, [\dots, [m_{v_k}, d]\dots]] = 0$$

pour tous $v_0, \dots, v_k \in V_\lambda$.

On note E l'opérateur égal à la multiplication par k dans $S^k(V_\lambda)$ (c'est l'opérateur d'Euler). C'est un opérateur différentiel d'ordre 1. Par conséquent, $P(E)$ est un opérateur différentiel d'ordre k.

Appliquons le lemme à $X - P(E)$, ici A est l'anneau des opérateurs différentiels sur $S(V_\lambda)$, pour tous $v_0, \dots, v_k \in V_\lambda$, on a:

$$[m_{v_0}, [\dots, [m_{v_k}, X - P(E)]\dots]](1) = \sum_{I\subset\{0,\dots,n\}} \varepsilon(I)v_I(X - P(E))(v_{\overline{CI}}),$$

en appliquant les deux membres au point 1. Or le premier membre est nul, donc

$$\sum_{I\subset\{0,\dots,n\}} \varepsilon(I)v_I(X - P(E))(v_{\overline{CI}}) = 0$$

En particulier, si tous les v_i sont égaux à un même élément $v \in V_\lambda$, on trouve:

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i C_{k+1}^i v^i (X - P(E)).v^{k+1-i} = 0.$$

C'est à dire:

$$Xv^{k+1} - \chi_{(k+1)\lambda}(X)v^{k+1} = v\left(\sum_{i=1}^{k+1} C_{k+1}^i v^{i-1}(Xv^{k+1-i} - \chi_{(k+1-i)\lambda}(X)v^{k+1-i})\right).$$

On a donc montré que $\mathcal{R}_{k+1}(X)$ est obtenu à partir des $\mathcal{R}_{k'}(X)$ pour $k' \leq k$. D'où le théorème. □

On dira que des éléments du centre de l'algèbre enveloppante permettent de séparer différents poids si la famille des valeurs des caractères infinitésimaux correspondants à chacun de ces poids sur les éléments de $Z(\mathfrak{g})$ considérés sont toutes distinctes.

Corollaire 2.3. *Si l est un entier tel que les éléments de $Z(\mathfrak{g})$ d'ordre $\leq l$ permettent de séparer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k\lambda$ des plus haut poids des sous-quotients simples intervenant dans $I_{k\lambda}$, alors I est engendré par ses éléments de degré $\leq l$.*

Proposition 2.4. *Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout V_λ complètement typique, I est engendré par ses éléments de degré $\leq N$.*

Démonstration. On considère le polynôme $Q = \prod_{\alpha\in\Delta_1, 2\alpha\notin\Delta_0} H_\alpha$ dans $S(\mathfrak{h})$. Notons $S^{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})^W$ l'image de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ dans $S(\mathfrak{h})^W$ par l'injection qui consiste à restreindre les éléments à $\mathfrak{h}^*$. D'après le théorème 2 de Kac [4], l'anneau de fractions de $(S^{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})^W)[Q^{-1}]$ est isomorphe à $(S(\mathfrak{h})^W)[Q^{-1}]$, donc c'est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_k$ des éléments de $Z(\mathfrak{g})$ tels que $\xi_1, \ldots, \xi_k, Q^{-1}$ engendrent cette algèbre. On va montrer que $\xi_1, \ldots, \xi_k, Q$ permettent, grâce au caractère infinitésimal, de séparer un module typique de tous les autres.

Notons tout d'abord que pour tout poids dominant λ, on a:

$$\chi_\lambda(Q) = (\alpha, \lambda + \rho),$$

par construction de l'homomorphisme de Harish-Chandra. En particulier, $\chi_\lambda(Q) = 0$ si et seulement si λ est le plus haut poids d'un module atypique. Si maintenant λ et μ sont deux plus hauts poids de modules typiques distincts, leurs caractères infinitésimaux sont distincts et définissent donc des idéaux maximaux distincts de $(S^{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})^W)[Q^{-1}]$. Donc les générateurs n'y prennent pas chacun la même valeur. D'où le résultat en appliquant le corollaire 2.3. □

3. La super algèbre de Lie $\mathfrak{osp}(3,2)$

3.1. *Description de la super algèbre de Lie* $\mathfrak{osp}(3,2)$

Soit $V = V_0 \oplus V_1$ un super espace vectoriel complexe de dimension $3 + 2\varepsilon$ muni d'une forme bilinéaire paire non dégénérée dont la restriction à V_0 (resp. V_1) est symétrique (resp. alternée). Une telle forme est dite orthosymplectique. On définit $\mathfrak{osp}(3,2)$ comme la sous super algèbre de lie de $\mathfrak{gl}(V)$ formée des éléments qui respectent la forme orthosymplectique. Choisissons convenablement une base de V. On peut choisir:

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{C}^2 \right\},$$

et les racines sont, en notant ε, η la base duale de $\mathbb{C}^2$:

$$\Delta_0 = \{\varepsilon, -\varepsilon, 2\eta, -2\eta\},$$

$$\Delta_1 = \{\varepsilon + \eta, \varepsilon - \eta, -\varepsilon + \eta, -\varepsilon - \eta, \eta, -\eta, \}.$$

Nous choisissons le système de racines simples:

$$S = \{\varepsilon - \eta, \eta\}.$$

On a $\rho = 1/2(-\varepsilon + \eta)$. Le produit scalaire sur $\mathfrak{h}^*$ déduit de la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$ dans la base (ε, η) s'écrit: $((x,y),(x',y')) = 2(-xx' + yy')$. La chambre de Weyl (pour Δ_0) est le quadrant positif. On voit que l'ensemble des poids dominants est la chambre de Weyl privée du demi-axe vertical strictement positif. Elle est entièrement contenue dans le cône positif, $\sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathbb{R}^+\alpha$. On remarque que ρ n'est pas dans le cône positif. Notons Ω l'élément de Casimir de degré 2 du centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, la valeur en Ω du caractère infinitésimal de λ est $c_\lambda = (\lambda, \lambda + 2\rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho)$, donc les lignes de niveau de Ω sont les hyperboles équilatères dont les asymptotes sont les parallèles aux diagonales passant par le point $-\rho$.

3.2. Décomposition du $\mathfrak{osp}(3,2)$*-module* $S^3(\Pi\mathfrak{osp}(3,2))$

Si $V = V_0 \oplus V_1$ est un super espace vectoriel, on désignera par ΠV le super espace vectoriel tel que $(\Pi V)_0 = V_1$ et $(\Pi V)_1 = V_0$.

On considère le $\mathfrak{g}$-module $\Pi\mathfrak{g} = V_{\varepsilon+\eta}$ (on doit changer la parité de la représentation adjointe car la plus grande racine est impaire).

Nous allons démontrer que $V_{\varepsilon+2\eta}$ est un facteur direct de $S^3(\Pi\mathfrak{g})$. Il est visible (cf. la fig. 1) que les poids $\varepsilon + 2\eta$ et $3\varepsilon + 3\eta$ sont sur une même ligne de niveau de Ω, l'élément de Casimir ne les sépare donc pas. On a:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{sp}(2) \cong \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2).$$

Notons V_1 (resp. V_2) la représentation fondamentale du premier (resp. du second) facteur $\mathfrak{sl}(2)$.

On peut alors écrire l'égalité de $\mathfrak{g}_0$-modules suivantes:

$$\mathfrak{g}_1 = S^2(V_1) \otimes S^1(V_2).$$

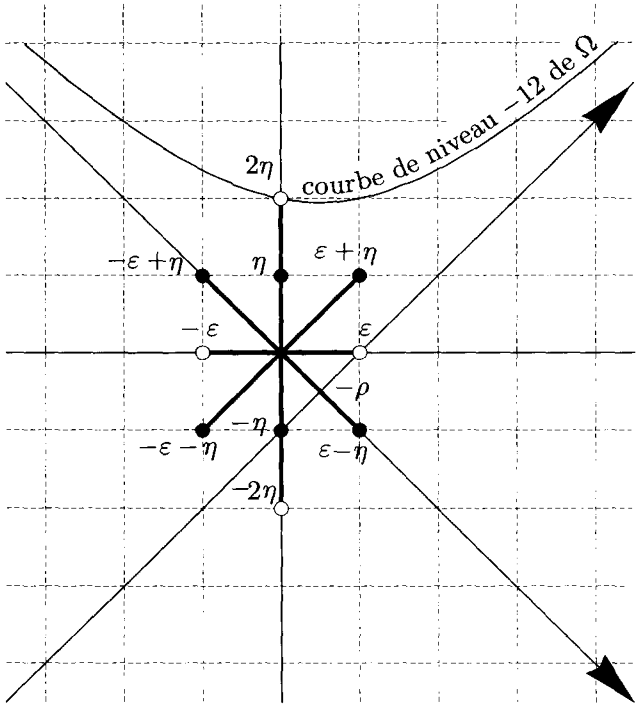

Fig. 1.

La restriction du crochet de Lie à $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ se calcule grâce à une application $\mathfrak{g}_0$-linéaire. On a:

$$S^2(\mathfrak{g}_1) \cong S^2(S^2(V_1)) \otimes S^2(V_2) \oplus \Lambda^2(S^2(V_1)) \otimes \Lambda^2(V_2).$$

Par Clebsch–Gordan, on a donc:

$$S^2(\mathfrak{g}_1) \cong S^4(V_1) \otimes S^2(V_2) \oplus [S^0(V_1) \otimes S^2(V_2) \oplus S^2(V_1) \otimes S^0(V_2)],$$
$$S^2(\mathfrak{g}_1) \cong S^4(V_1) \otimes S^2(V_2) \oplus \mathfrak{g}_0.$$

L'application linéaire cherchée est la projection sur le second facteur [7, p. 229].

Nous décomposons $S^3(\Pi\mathfrak{g})$ en $\mathfrak{g}_0$-modules irréductibles, puis nous utilisons une formule des multiplicités due à Kac [4] pour amorcer la décomposition en $\mathfrak{g}$-modules simples.

Rappelons que si $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ est une algèbre de Lie semi-simple formée de deux facteurs simples, les $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$-modules irréductibles sont de la forme $V \otimes V'$, où V (resp. V') est un $\mathfrak{g}$- (resp. $\mathfrak{g}'$-) module simple.

Comme $\mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$-module, on a:

$$S^3(\Pi\mathfrak{g}) = S^3(\mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{g}_0 \otimes S^2(\mathfrak{g}_1)) \oplus (\Lambda^2(\mathfrak{g}_0) \otimes \mathfrak{g}_1) \oplus \Lambda^3(\mathfrak{g}_0).$$

Décomposons chacun des termes de cette somme directe à l'aide des formules de Clebsch-Gordan. Pour alléger les notations, on pose $S^{k,l} = S^k(V_1) \otimes S^l(V_2)$ comme $\mathfrak{g}_0$-module. On a:

$$S^3(\mathfrak{g}_1) = S^3(S^{2,1}).$$

On peut vérifier, à l'aide de la formule des caractères de Weyl, que l'on a l'isomorphisme de $\mathfrak{gl}(A) \times \mathfrak{gl}(B)$-modules:

$$S^3(A \otimes B) = S^3(A) \otimes S^3(B) \oplus TA \otimes B$$

où A et B sont des espaces vectoriels respectivement de dimension 3 et 2, et où TA désigne le conoyau de la flèche $\Lambda^3(A) \to \Lambda^2(A) \otimes A$ (complexe de Koszul).

Ceci se traduit ici par:

$$\begin{aligned}
S^3(\mathfrak{g}_1) &= S^3(S^2(V_1)) \otimes S^3(V_2) \oplus S^4(V_1) \otimes S^1(V_2) \oplus S^2(V_1) \otimes S^1(V_2), \\
S^3(\mathfrak{g}_1) &= S^2(S^3(V_1)) \otimes S^3(V_2) \oplus S^4(V_1) \otimes S^1(V_2) \oplus S^2(V_1) \otimes S^1(V_2), \\
S^3(\mathfrak{g}_1) &= S^{6,3} \oplus S^{2,3} \oplus S^{4,1} \oplus S^{2,1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^2(\mathfrak{g}_0) \otimes \mathfrak{g}_1 &= \Lambda^2(S^{0,2} \oplus S^{2,0}) \otimes S^{2,1}, \\
\Lambda^2(\mathfrak{g}_0) \otimes \mathfrak{g}_1 &= (S^0(V_1) \otimes S^2(V_2) \oplus S^2(V_1) \otimes S^0(V_2) \oplus S^2(V_1) \otimes S^2(V_2)) \\
&\quad \otimes (S^2(V_1) \otimes S^1(V_2)), \\
\Lambda^2(\mathfrak{g}_0) \otimes \mathfrak{g}_1 &= S^{2,3} \oplus S^{2,1} \oplus S^{4,1} \oplus S^{2,1} \oplus S^{0,1} \oplus S^{4,3} \oplus S^{4,1} \oplus S^{2,3} \\
&\quad \oplus S^{2,1} \oplus S^{0,3} \oplus S^{0,1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_0 \otimes S^2(\mathfrak{g}_1) &= (S^{0,2} \oplus S^{2,0}) \otimes S^2(S^{2,1}), \\
\mathfrak{g}_0 \otimes S^2(\mathfrak{g}_1) &= S^{4,4} \oplus S^{4,2} \oplus S^{4,0} \oplus S^{6,2} \oplus S^{4,2} \oplus S^{2,2} \oplus S^{0,4} \oplus S^{0,2} \\
&\quad \oplus S^{0,0} \oplus S^{2,2} \oplus S^{2,2} \oplus S^{4,0} \oplus S^{2,0} \oplus S^{0,0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^3(\mathfrak{g}_0) &= \Lambda^3(S^{0,2} \oplus S^{2,0}), \\
\Lambda^3(\mathfrak{g}_0) &= \Lambda^3(S^2(V_1) \otimes S^0(V_2)) \oplus \Lambda^3(S^0(V_1) \otimes S^2(V_2)) \\
&\quad \oplus \Lambda^2(S^2(V_1) \otimes S^0(V_2)) \otimes (S^0(V_1) \otimes S^2(V_2)) \\
&\quad \oplus (S^2(V_1) \otimes S^0(V_2)) \otimes \Lambda^2(S^0(V_1) \otimes S^2(V_2)), \\
\Lambda^3(\mathfrak{g}_0) &= S^{0,0} \oplus S^{0,0} \oplus S^{2,2} \oplus S^{2,2}.
\end{aligned}$$

Donc, en réordonnant, on a la décomposition de $S^3(\Pi\mathfrak{g})$ suivante:

$$\begin{aligned}
S^3(\Pi\mathfrak{g}) = {}& S^{6,3} \oplus S^{6,2} \oplus S^{4,4} \oplus S^{4,3} \oplus^2 S^{4,2} \oplus^3 S^{4,1} \oplus^2 S^{4,0} \oplus^3 S^{2,3} \\
& \oplus^5 S^{2,2} \oplus^4 S^{2,1} \oplus S^{2,0} \oplus S^{0,4} \oplus S^{0,3} \oplus S^{0,2} \oplus^2 S^{0,1} \oplus^4 S^{0,0}.
\end{aligned}$$

On utilise maintenant le résultat de Kac:

Proposition 3.1 ([4], prop. 2.11). *Soit $\mathfrak{g}$ une super algèbre de Lie basique classique, soit V un $\mathfrak{g}$-module typique de plus haut poids Λ. On note $m_\Lambda(\mu)$ la multiplicité d'un $\mathfrak{g}_0$-module irréductible de plus haut poids μ dans le $\mathfrak{g}_0$-module V. Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on note $\kappa_1(\lambda)$ le nombre de partitions de λ en sommes de racines distinctes de Δ_1^+. Alors on a:*

$$m_\Lambda(\mu) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\kappa_1(w(\Lambda+\rho) - (\mu+\rho))$$

(on a noté W le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h})$).

On peut décomposer le $\mathfrak{g}$-module irréductible $V_{3\varepsilon+3\eta}$ en $\mathfrak{g}_0$-modules simples à l'aide de la proposition. Il vient:

$$V_{3\varepsilon+3\eta} = S^{6,3} \oplus S^{6,2} \oplus S^{4,4} \oplus S^{4,3} \oplus S^{4,2} \oplus S^{4,1} \oplus S^{2,3} \oplus S^{2,2}.$$

En comparant avec la décomposition de $S^3(\Pi\mathfrak{g})$, on voit que $2\varepsilon + 2\eta$ est un poids maximum du supplémentaire $\mathfrak{g}$-stable de $V_{3\varepsilon+3\eta}$ dans $S^3(\Pi\mathfrak{g})$.

Sa décomposition en $\mathfrak{g}_0$-modules simples est la suivante:

$$V_{2\varepsilon+2\eta} = S^{4,2} \oplus S^{4,1} \oplus S^{2,3} \oplus S^{2,2} \oplus S^{2,1} \oplus S^{2,0} \oplus S^{0,2} \oplus S^{0,1}.$$

Un poids maximal majorant $\varepsilon + 2\eta$ est $2\varepsilon + \eta$ qui le plus haut poids d'un module atypique: la proposition ne permet donc pas de trouver la décomposition du module associé. On pourrait utiliser [9] pour avoir sa décomposition, mais il est plus commode de la calculer directement.

Lemme 3.2. *Comme $\mathfrak{g}_0$-module, on a:*

$$V_{2\varepsilon+\eta} = S^{4,1} \oplus S^{4,0} \oplus S^{2,2} \oplus S^{2,1}.$$

Démonstration. Notons V la représentation fondamentale de $\mathfrak{osp}(3,2)$. Son plus haut poids est ε, qui est le plus haut poids d'un module atypique, et l'on a:

$$V = S^{2,0} \oplus S^{0,1}$$

comme $\mathfrak{g}_0$-modules. Calculons les $\mathfrak{g}_0$-modules simples intervenant dans $V \otimes \Lambda^2(V)$:

$$V \otimes \Lambda^2(V) = S^{4,1} \oplus S^{4,0} \oplus^2 S^{2,2} \oplus^2 S^{2,1} \oplus^2 S^{2,0} \oplus S^{0,3} \oplus^2 S^{0,1} \oplus S^{0,0}.$$

On a une surjection $\mathfrak{g}$-linéaire:

$$V \otimes \Lambda^2(V) \to \Lambda^3(V) \oplus V$$

(car $V \cong V^*$).

Le sous-quotient $\Lambda^3(V)$ est isomorphe à $V_{\varepsilon+2\eta}$ (décomposition en $\mathfrak{g}_0$-modules), qui est typique et est donc facteur direct.

D'autre part, la multiplication extérieure définit une application $\mathfrak{g}$-linéaire:

$$V \to V^* \otimes \Lambda^2(V) \cong V \otimes \Lambda^2(V).$$

Un calcul montre que la composée

$$V \to V \otimes \Lambda^2(V) \to V$$

est nulle.

Il reste un sous-quotient de $V \otimes \Lambda^2(V)$ dont la décomposition en $\mathfrak{g}_0$-modules est:

$$S^{4,1} \oplus S^{4,0} \oplus S^{2,2} \oplus S^{2,1}.$$

On vérifie qu'aucun autre $\mathfrak{g}$-module simple que $V_{2\varepsilon+\eta}$ n'apparaît, d'où le lemme. □

Il ne reste plus qu'un poids maximal majorant $\varepsilon + 2\eta$, à savoir $\varepsilon + 3\eta$, il est le plus haut poids d'un module typique et on peut donc calculer sa décomposition en $\mathfrak{g}_0$-modules:

$$V_{\varepsilon+3\eta} = S^{2,3} \oplus S^{2,2} \oplus S^{0,4} \oplus S^{0,1}.$$

Il reste donc un $\mathfrak{g}$-module de plus haut poids $\varepsilon + 2\eta$ dans $S^3(\Pi\mathfrak{g})$.

3.3. L'algèbre $\bigoplus_{k\geq 0} V_{k\lambda}$

Remarque. Dans le cas présent tout module typique est complètement typique.

Posons, avec les notations précédentes,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(3,2), \qquad \lambda = \varepsilon + \eta, \quad I_k = \mathrm{Ker}(S^k(V_\lambda) \to V_{k\lambda}).$$

Proposition 3.3. *L'application naturelle*

$$I_2 \otimes V_\lambda \to I_3$$

n'est pas surjective. En particulier, $\bigoplus_k I_{k\lambda}$ n'est pas engendré par ses éléments de degré 2, contrairement à ce qui se produit dans le cas classique traité par Kostant.

Lemme 3.4. *On a l'égalité: $I_2 = \Pi V_\lambda = \mathfrak{g}$*

Démonstration (du lemme). On décompose $V_{2\lambda}$ en $\mathfrak{g}_0$-modules irréductibles, par la formule de la proposition 3.1. On trouve:

$$V_{2\lambda} = S^{4,2} \oplus S^{4,1} \oplus S^{2,3} \oplus S^{2,2} \oplus S^{2,1} \oplus S^{2,0} \oplus S^{0,2} \oplus S^{0,1}.$$

Ce module est de dimension 60. De plus, un calcul simple montre que la dimension de $S^2(V_\lambda)$ est 72. Nous avons défini une application $\mathfrak{g}$-linéaire de

$S^2(V_\lambda) \cong \Lambda^2(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g} \cong \Pi V_\lambda$, à savoir le crochet de Lie. Cette application est surjective, $\mathfrak{g}$ est de dimension 12, donc c'est un supplémentaire de $V_{2\lambda}$ dans $S^2(V_\lambda)$.

Démonstration (de la proposition). Comme $\mathfrak{g}$-modules, on a l'égalité:

$$I_2 \otimes V_\lambda = \Pi V_\lambda \otimes V_\lambda = \Pi S^2(V_\lambda) \oplus \Pi\Lambda^2(V_\lambda).$$

Comme $\mathfrak{g}$-modules, on a:

$$S^2(V_\lambda) = V_{2\lambda} \oplus \Pi\mathfrak{g},$$

donc le module de plus haut poids $\varepsilon + 2\eta$ n'apparaît pas.

Comme $\mathfrak{g}_0$-modules, on a:

$$\Lambda^2(V_\lambda) \cong S^2(\mathfrak{g}_0) \oplus \mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}_1 \oplus \Lambda^2(\mathfrak{g}_1).$$

En effectuant les calculs, il vient:

$$\Lambda^2(V_\lambda) \cong S^{4,1} \oplus^2 S^{4,0} \oplus S^{2,3} \oplus^2 S^{2,2} \oplus^2 S^{2,1} \oplus S^{0,4} \oplus S^{0,1} \oplus^3 S^{0,0}.$$

On a donc la décomposition en $\mathfrak{g}$-modules:

$$\Lambda^2(V_\lambda) = V_{2\varepsilon+\eta} \oplus V_{\varepsilon+3\eta} \oplus V_{2\varepsilon} \oplus^2 V_0.$$

Donc $V_{\varepsilon+2\eta}$ n'apparaît pas dans $V_\lambda \otimes I_2$. Or il apparaît dans I_3, d'où la proposition. □

3.4. L'idéal I

Notons $\Omega^{(k)}$ l'élément de $Z(\mathfrak{g})$ qui est l'image de $\operatorname{str}((\operatorname{ad} X)^k)$ (str désignant la super trace) par l'homomorphisme usuel $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to Z(\mathfrak{g})$. On remarque tout d'abord que $\Omega^{(3)}$ est nul. D'après [11], la valeur de $\chi_\lambda(\Omega^{(4)})$ est:

$$\chi_\lambda(\Omega^{(4)}) = ((x + 1/2)^4 - (y - 1/2)^4)$$

si $\lambda = (x, y)$.

Or d'après ce qui précède,

$$\chi_\lambda(\Omega^{(2)}) = ((x + 1/2)^2 - (y - 1/2)^2)$$

d'où on déduit:

$$\chi_\lambda(\Omega^{(4)})/\chi_\lambda(\Omega^{(2)}) = ((x + 1/2)^2 + (y - 1/2)^2).$$

Remarque. Soient λ et μ deux plus hauts poids de modules typiques. Si $\chi_\lambda(\Omega^{(2)}) = \chi_\mu(\Omega^{(2)})$ et $\chi_\lambda(\Omega^{(4)}) = \chi_\mu(\Omega^{(4)})$, alors $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ sont W-conjugués car deux coniques s'intersectent en quatre points.

Il résulte de cette remarque que si λ est le plus haut poids d'un module complètement typique, si $k > 1$ et si μ est un poids de la chambre de Weyl inférieur ou égal à $k\lambda$, $k\lambda$ et μ sont séparés par $\Omega^{(2)}$ et $\Omega^{(4)}$. Ceci permet de conclure que I est engendré par I_2, I_3 et I_4 (théorème 2.1). Remarquons alors que I_4 est engendré par I_2 car $4\varepsilon + 4\eta$ est séparé de tous les autres plus hauts poids de $S^4(V_{\varepsilon+\eta})$ par $\Omega^{(2)}$. Par le théorème 2.1, on a la proposition suivante:

Proposition 3.5. *Le quotient de I par l'idéal engendré par I_2 est non nul et il est concentré en degré 3.*

4. Le cas de $\mathfrak{sl}(1,2)$

4.1. La super algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(1,2)$

Soit $V = V_0 + V_1$ un super espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $1 + 2\varepsilon$. La super algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}(1,2)$ est la sous super algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ constituée des matrices de super trace nulle. Sa partie paire, $\mathfrak{g}_0$, peut donc être considérée comme le noyau de l'application:

$$\mathbb{C} \oplus \mathrm{End}(V_1, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad (\lambda, u) \mapsto \lambda - \mathrm{tr}(u).$$

On choisit une base de V_1. Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ constituée des matrices diagonales:

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Le système de racines de $\mathfrak{h}^*$ est donné par:

$$\Delta_0 = \{-\varepsilon + \eta, \varepsilon - \eta\},$$
$$\Delta_1 = \{-\varepsilon, \varepsilon, -\eta, \eta\},$$

où on a noté (ε, η) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On choisit le système de racines simples:

$$S = \{-\varepsilon, \eta\}.$$

Les racines ε et η étant isotropes, le produit scalaire déduit de la forme de Killing sur $\mathfrak{h}^*$ est, à un scalaire près, le produit des coordonnées. Les poids dominants sont représentés par les points à coordonnées entières situés au dessus de la diagonale. On notera $\mathcal{V}_{p,q}$ le $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids (p,q) si $p \leq q$. Le module $\mathcal{V}_{p,q}$ est typique si et seulement si $pq \neq 0$, car le choix des racines simples implique que $\rho = 0$. Au couple (p,q), on associe un $\mathfrak{g}_0$-module: c'est le $\mathfrak{gl}(2)$-module $S^{q-p}(V) \otimes \mathbb{C}_p$ où V désigne la représentation fondamentale et $\mathbb{C}_p$ désigne le $\mathbb{C}$-module dans lequel l'action est la multiplication par p. On note $V_{p,q}$ ce $\mathfrak{g}_0$-module et on convient que $V_{p,q} = 0$

si $p > q$. La proposition de Kac (proposition 3.1) donne la décomposition en $\mathfrak{g}_0$-modules simples: $\mathcal{V}_{p,q} = V_{p,q} \oplus V_{p+1,q} \oplus V_{p+1,q-1} \oplus V_{p,q-1}$.

Proposition 4.1 ("Clebsch–Gordan"). *Soient p, q, p', q' quatre entiers tels que $0 < p < q$, $0 < p' < q'$. Pour des commodités d'écriture, on suppose que $q - p \leq q' - p'$. Alors on a:*

$$\mathcal{V}_{p,q} \otimes \mathcal{V}_{p',q'} = \bigoplus_{0 \leq i \leq q-p} \; \bigoplus_{\alpha \in \{0,1\},\, \beta \in \{0,1\}} \mathcal{V}_{p+p'+i+\alpha,\, q+q'-i-\beta}.$$

(La somme est directe car tous les modules considérés sont typiques.)

Ceci se démontre en comparant la décomposition en $\mathfrak{g}_0$-modules des deux membres, obtenue au moyen de la formule de Clebsch–Gordan usuelle.

4.2. Le cas de $\mathcal{V}_{2,4}$

La fig. 2 décrit les décompositions de $S^2(\mathcal{V}_{2,4})$ et $S^3(\mathcal{V}_{2,4})$ en $\mathfrak{g}$-modules simples. Les $\otimes$ désignent les $\mathfrak{g}$-plus haut poids, les nombres les $\mathfrak{g}$-multiplicités, les $\circ$ sont les $\mathfrak{g}_0$-plus hauts poids. Les poids situés sur la même courbe de

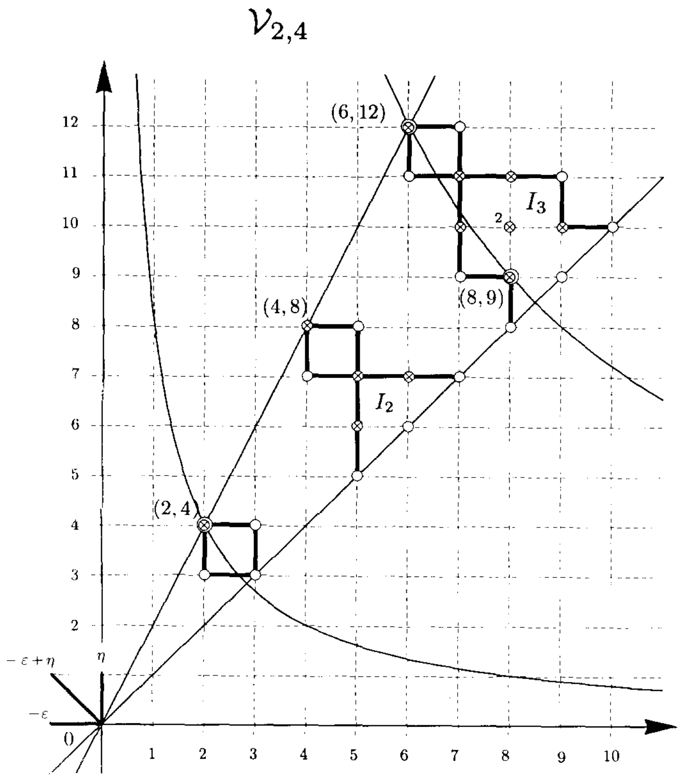

Fig. 2.

niveau que le plus grand de plus hauts poids sont indiqués par $\circledast$. Les poids (6,12) et (8,9) sont sur la même ligne de niveau de l'opérateur de Casimir.

Les $\mathfrak{g}$-modules simples $\mathcal{V}_{6,12}$ et $\mathcal{V}_{8,9}$ sont donc des facteurs directs de $S^3(\mathcal{V}_{2,4})$ qui ne sont pas séparés par l'opérateur de Casimir. Par les procédés que nous avons déja utilisés pour $\mathfrak{osp}(3,2)$, on détermine les $\mathfrak{sl}(2)$-plus hauts poids intervenant dans $S^2(V_\lambda)$ et $S^3(V_\lambda)$. Ensuite, on reconstitue les $\mathfrak{sl}(1,2)$ modules simples en interprétant graphiquement la proposition de Kac: si (p,q) est un poids situé entre la diagonale et le demi-axe vertical positif qui est le plus haut poids d'un module typique, les $\mathfrak{sl}(2)$ plus hauts poids du module $\mathcal{V}_{p,q}$ sont $(p,q), (p+1,q), (p,q-1), (p+1,q-1)$.

On peut donc, en procédant par ordre (i.e. en partant du $\mathfrak{sl}(1,2)$ plus haut poids le plus grand possible à chaque étape), reconstituer complètement les $\mathfrak{sl}(2)$ poids, les $\mathfrak{sl}(1,2)$ poids, et leurs multiplicités.

Proposition 4.2. *L'idéal noyau de l'homomorphisme naturel de $\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{V}_{2k,4k}$ dans $S(\mathcal{V}_{2,4})$ est engendré par ses éléments de degré 2.*

Démonstration. On vérifie sur la décomposition en $\mathfrak{g}_0$-modules que:

$$S^k(\mathcal{V}_{1,2}) = \mathcal{V}_{k,2k}.$$

La proposition est donc le cas particulier qui correspond à $V = \mathcal{V}_{1,2}$ du lemme suivant:

Lemme 4.3. *Soit V un super espace vectoriel complexe. L'idéal définissant $\bigoplus_{n\geq 0}S^{2n}(V)$ dans $S(S^2(V))$ est engendré par ses éléments de degré 2.*

(Il s'agit d'un cas particulier du "plongement de Véronèse", pour le cas classique voir par exemple [2, p. 178].)

Démonstration (du lemme). Un système de générateurs de cet idéal est donné par les relations: $(xy)(zt) = (-1)^{p(y)p(z)}(xz)(yt)$, où x, y, z, t sont des éléments de V. On vérifie ceci en comparant les noyaux des applications canoniques:

$$\bigoplus_{n\geq 0} T^{2n}(V) \to \oplus_{n\neq 0}T^{2n}(V)$$

et

$$\bigoplus_{n\geq 0} T^{2n}(V) \to S(S^2(V)). \qquad \square$$

Ainsi on a la proposition suivante:

Proposition 4.4. *L'idéal I peut être engendré par ses éléments de degré 2 bien que le Casimir ne sépare pas les plus hauts poids.*

4.3. *Le cas de $\mathcal{V}_{2,5}$*

Les conventions de la fig. 3 sont les mêmes que celles de la précédente. Le module $\mathcal{V}_{9,10}$ n'est pas séparé du module $\mathcal{V}_{6,15}$ par l'élément de Casimir. Nous allons voir qu'il s'agit d'un sous-module de I_3 qui n'est pas dans $I_2 V_\lambda$. La démonstration est moins simple que pour le cas de $\mathfrak{osp}(3,2)$ faite précédemment car $\mathcal{V}_{9,10}$ apparaît dans $I_2 \otimes V_\lambda$.

La proposition 4.1 permet de vérifier que

$$I_2 \otimes \mathcal{V}_{2,5} = (\mathcal{V}_{5,9} \oplus \mathcal{V}_{6,9} \oplus \mathcal{V}_{5,8} \oplus \mathcal{V}_{6,8}) \otimes \mathcal{V}_{2,5}.$$

Le $\mathfrak{g}$-module $\mathcal{V}_{9,10}$ apparaît avec multiplicité 1 dans le facteur $\mathcal{V}_{5,8} \otimes \mathcal{V}_{2,5}$ et n'apparaît pas dans les autres. Montrons que l'image de ce facteur par l'application naturelle

$$I_2 \otimes \mathcal{V}_{2,5} \to I_3$$

est nulle. Pour cela, montrons un résultat intermédiaire dans un cadre plus général.

Proposition 4.5. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une super algèbre de Lie basique classique, soit* $\Omega \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *un élément de Casimir de degré 2, soit* λ *le plus haut poids d'un module*

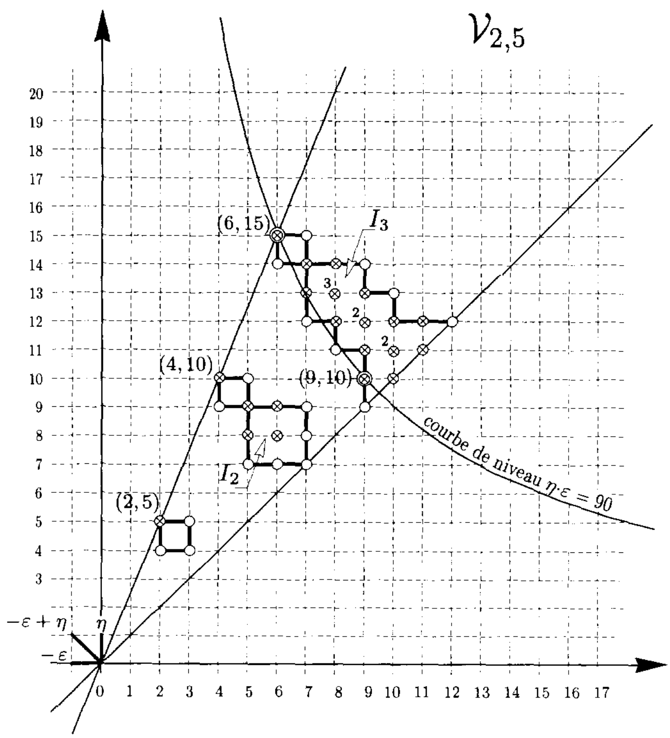

Fig. 3.

complètement typique et soit V_λ le $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids λ. Soit I_2 le noyau de l'application naturelle $S^2(V_\lambda) \to V_{2\lambda}$. Notons $c_{k\lambda}$ la valeur de l'opérateur de Casimir sur $V_{k\lambda}$. L'application composée:

$$\begin{array}{lll} S^3(V_\lambda) \to & V_\lambda \otimes S^2(V_\lambda) & \\ & \downarrow \mathrm{id}\otimes(\Omega - c_{2\lambda}) & \\ & V_\lambda \otimes I_2 & \overset{\text{multipl.}}{\rightarrow} S^3(V_\lambda) \overset{\text{proj.}}{\rightarrow} \mathrm{Coker}(\Omega - c_{3\lambda}) \end{array}$$

est nulle, où la première flèche se déduit des inclusions $S^3(V_\lambda) \subset T^3(V_\lambda)$ et $S^2(V_\lambda) \otimes V_\lambda \oplus V_\lambda \otimes \Lambda^2(V_\lambda) \subset T^3(V_\lambda)$.

Démonstration. D'après la démonstration du théorème 2.1, on a pour l'action de $S^3(V_\lambda)$,

$$\begin{aligned} \Omega(xyz) = x\Omega(yz) &+ (-1)^{p(z)(p(x)+p(y))} z\Omega(xy) \\ &+ (-1)^{p(x)(p(y)+p(z))} y\Omega(zx) - \Omega(x)yz - x\Omega(y)z - xy\Omega(z), \end{aligned}$$

pour tous $x, y, z \in V_\lambda$ (ici, $p(x)$ désigne la parité de x).

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on pose $c_\lambda = (\lambda, \lambda + 2\rho)$: il s'agit de la valeur de l'opérateur de Casimir sur V_λ. On a:

$$c_{3\lambda} = 3(c_{2\lambda} - c_\lambda).$$

On en déduit que si x, y, z sont dans V_λ,

$$\begin{aligned} (\Omega - c_{3\lambda})(xyz) = x(\Omega - c_{2\lambda})(yz) &+ (-1)^{p(z)(p(x)+p(y))} z(\Omega - c_{2\lambda})(xy) \\ &+ (-1)^{p(x)(p(y)+p(z))} y(\Omega - c_{2\lambda})(zx). \end{aligned}$$

Considérons le diagramme:

$$\begin{array}{lll} S^3(V_\lambda) \to & V_\lambda \otimes S^2(V_\lambda) & \\ & \downarrow \mathrm{id}\otimes(\Omega - c_{2\lambda}) & \\ & V_\lambda \otimes I_2 & \overset{\text{multipl.}}{\rightarrow} S^3(V_\lambda) \end{array}$$

Dans $V_\lambda \otimes V_\lambda \otimes V_\lambda$, les tenseurs

$$x \otimes y \otimes z + (-1)^{p(z)(p(x)+p(y))} z \otimes x \otimes y + (-1)^{p(x)(p(y)+p(z))} y \otimes z \otimes x$$

engendrent $S^3(V_\lambda) \oplus \Lambda^3(V_\lambda)$. L'application composée est $\Omega - c_{3\lambda}$, d'où la proposition. □

Revenons à $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1,2), V_\lambda = \mathcal{V}_{2,5}$ et introduisons quelques notations supplémentaires:
On note f l'application composée:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{V}_{9,10} \to S^3(\mathcal{V}_{2,5}) \to & \mathcal{V}_{2,5} \otimes S^2(\mathcal{V}_{2,5}) \\ & \downarrow \\ & \mathcal{V}_{2,5} \otimes I_2 \end{array}$$

L'application f est non nulle car $\mathcal{V}_{2,5}\otimes S^2(\mathcal{V}_{2,5}) = \mathcal{V}_{2,5}\otimes\mathcal{V}_{4,10}\oplus\mathcal{V}_{2,5}\otimes I_2$ et l'on vérifie grâce à la proposition 4.1 que le premier facteur ne contient pas $\mathcal{V}_{9,10}$.

Soit g l'application composée:

$$\mathcal{V}_{2,5}\otimes I_2 \to S^3(\mathcal{V}_{2,5}) \to \mathcal{V}_{9,10}$$

où la dernière flèche est la projection.

Remarquons que le supplémentaire $\mathfrak{g}$-stable de $\mathcal{V}_{9,10}$ dans $S^3(\mathcal{V}_{2,5})$ contient l'image de $\Omega - c_{3(2,5)}$. Donc la composée $g\circ f$ est nulle d'après la proposition précédente. En d'autres termes, g est nulle sur l'image de f, qui est le facteur $\mathcal{V}_{9,10}$ de $\mathcal{V}_{2,5}\otimes I_2$. Comme $\mathrm{Im}(g)$ est le seul facteur $\mathcal{V}_{9,10}$ de I_3, ce facteur ne provient pas du $\mathcal{V}_{9,10}$ de $\mathcal{V}_{2,5}\otimes I_2$.

Donc les éléments de I_2 ne suffisent pas à engendrer I_3, et a fortiori I tout entier.

Notons Ω' l'élément de $Z(\mathfrak{g})$ qui correspond à $\mathrm{str}((\mathrm{ad}\,x)^3)$. D'après [11], on a:

$$\chi_\lambda(\Omega') = xy(x+y)$$

si $\lambda = (x,y)$.

Rappelons que

$$\chi_\lambda(\Omega) = xy.$$

On a donc:

$$\chi_\lambda(\Omega')/\chi_\lambda(\Omega) = x+y,$$

donc ces deux éléments de $Z(\mathfrak{g})$ séparent tous les plus hauts poids de modules typiques.

On peut donc en déduire la proposition suivante:

Proposition 4.6. *L'idéal I est engendré par I_2 et I_3 (comme dans le cas de chaque module complètement typique de $\mathfrak{sl}(1,2)$), mais pas par I_2.*

Remarque. La raison pour laquelle ce raisonnement ne fonctionne pas avec $\mathcal{V}_{2,4}$ est que $\mathcal{V}_{8,9}$ n'apparaît pas dans le produit tensoriel $\mathcal{V}_{2,4}\otimes\mathcal{V}_{4,8}$.

5. Conclusion

Nous avons vu que $I_{2\lambda}$ n'engendre pas, en général l'idéal I. La méthode employée ne permet pas de distinguer les poids pour lesquels $I_{2\lambda}$ engendre I des autres poids: en effet l'exemple de la quatrième partie que nous avons noté $\mathcal{V}_{2,4}$ montre que $I_{2\lambda}$ peut engendrer I alors que le Casimir ne sépare pas le poids 3λ des autres plus hauts poids intervenant dans $S^3(V_\lambda)$.

Dans le cas d'un module simple complètement typique, les relations de Plücker provenant des éléments de $Z(\mathfrak{g})$ engendrent toujours I. Qu'en est-il lorsque le module n'est pas complètement typique?

Dans les exemples traités ci-dessus, l'idéal de $S(V_\lambda)$ engendré par $I_{2\lambda}$ est toujours de codimension finie dans I. Est-ce général?

Références

[1] D. Garfinkle, A new construction of Joseph ideal, Ph.D. thesis, MIT, Cambridge.

[2] P. Griffiths et F. Harris, *Principles of Algebraic Geometry* (Wiley, 1978).

[3] V.G. Kac, Lie superalgebras, Advances Math. 26 (1977) 8–96.

[4] V.G. Kac, *Representations of Classical Lie Superalgebras*, LNM 676 (Springer, 1978) pp. 597–626.

[5] V.G. Kac et D.H. Peterson, *Regular Functions on Certain Infinite Dimensional Groups*, Progr. Math. 36 (Birkhaüser, Boston, 1983) pp. 141–166.

[6] B. Kostant, *Graded Manifolds, Graded Lie Theory and Prequantization*, LNM 570 (Springer, 1975) pp. 177–306.

[7] G. Lancaster et J. Towber, Representation functions and flag algebras for the classical groups I, J. Alg. 59 (1979) 16–38.

[8] Y. Manin, Gauge Field Theory and Complex Geometry, Grundlehren der math. Wissenschaften 289 (Springer, 1988).

[9] I. Penkov et V. Serganova, Cohomology of G/P for classical complex Lie supergroups and characters of some atypical G-modules, Ann. Inst. Fourier, 39, fasc. 4 (1989).

[10] A. Ramanathan, *Equations Defining Schubert Varieties and Frobenius Splitting of Diagonals*, Publications Mathématiques de l'IHES 65 (1987) pp. 61–90.

[11] M. Scheunert, Eigenvalues of Casimir operators for the general linear, the special linear and the orthosymplectic Lie superalgebras, University of Bonn, preprint, HE-82-26 (Octobre 1982).

[12] J.-P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6 (1956) 1–42.